2M

УДК 517.11+519.92

Ю.Н. Минаев
Национальный авиационный университет МОН Украины, г. Киев
Украина, 03057, г. Киев, пр-т космонавта Комарова, 1
О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева
Киевский национальный университет строительства и архитектуры МОН Украины, Киев
Украина, 03037, г. Киев, Воздухофлотский пр-т, 31

Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики

Yu.N. Minaev
National aviation university MES of Ukraine, c. Kiev
Ukraine, 03057, c. Kiev, Komarova av., 1
O.Yu. Filimonova, Ju.I. Minaeva
Kiev National university of civil building and architectures MES of Ukraine, c. Kiev
Ukraine, 03037, c. Kiev, Vozduhoflotskiy av., 31

Tensor Model FS-Granules and Their use for Solving Fuzzy Arithmetic

Ю.М. Мінаєв
Національний авіаційний університет МОН України, м. Київ
Україна, 03057, м. Київ, пр-т космонавта Комарова, 1
О.Ю. Філімонова, Ю.І. Мінаєва
Київський національний університет будівництва і архітектури МОН України, м. Київ
Україна, 03037, м. Київ, Повітрофлотський пр-т, 31

Тензорні моделі НМ-гранул та їх застосування для розв'язку задач нечіткої арифметики

В статье рассматриваются вопросы представления НМ-Г в форме тензорного произведения с матрицами размерностью n×n, где n – число различимых элементов (функции принадлежности). Предложено гранулярные вычисления реализовывать на основе моделей Кронекеровой алгебры, введены расширенные операции Кронекеровой алгебры, показана возможность расширения класса решаемых задач в условиях неопределенности за счет использования скрытых функций принадлежности.
Ключевые слова: гранулярный компьютинг, нечеткое множество, тензорные гранулы.

The questions of presentation of FS-GRANULES in the form of tensor product with matrixes by dimensionality n×n, where n – a number of discernible elements (membership functions) are considered. Granular calculation to realize on the base of models an Kronecker algebra are Offered , extended operations an Kronecker algebra are incorporated, the possibility increase-thread of class of deciding problems in conditions of uncertainty to the account of using the a hide membership functions is shown.
Key words: Granular calculation, fuzzy set, tensor granule.

У статті розглядаються питання НМ-гранул у формі тензорного добутку з матрицями вимірністю n×n, де n – кількість нерозрізнюваних елементів (функції належності). Запропоновано гранулярні обчислення реалізовувати на підставі моделей Кронекерової алгебри, введені розширені операції Кронекерової алгебри, показано можливість розширення класу розв'язуваних задач за умов невизначеності за рахунок використання прихованих функцій належності.
Ключові слова: гранулярний комп'ютинг, нечітка множина, тензорні гранули.

Введение

В последнее 10-летие резко возрос интерес к гранулированию информации и гранулярным вычислениям (гранулированный компьютинг – ГрК). Это объясняется тем, что *информационные гранулы* (ИГ) играют ведущую роль в представлении и обработке знаний когнитивными агентами. В частности, выделение скрытых знаний, определение новых свойств информационных объектов на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД), например, интеллектуальный кластерный анализ в условиях неопределенности [1] и др. задачи успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы.

Современное состояние проблемы, цель работы

Впервые вопрос гранулирования нечеткой информации и способы ее обработки поставлен в работе Л. Заде [2], в которой *гранула* определена как группа объектов (или точек), которые представлены *вместе* на основе неразличимости, сходства, близости. Концепция *универсального ограничения* [3] обеспечивает основу для классификации нечетких гранул (Г). В теории нечеткости Г рассмотрена как группа точек, характеризуемая универсальным ограничением, тип гранулы определен типом ограничений. Вопросы формирования ИГ тесно связаны с теорией грубых множеств (ГМ). В работе [4] показано, что ГМ может рассматриваться как четкое М *с грубым описанием*.

Гранулярный компьютинг (ГрК), понимаемый как методология и методика информационного анализа неочевидно структурированных систем, дает, с одной стороны, сжатие информации, с другой – возможность работы с данными в условиях неопределенности, не прибегая к обязательному назначению (эвристическому) ФП. Кроме того, Г позволяют при необходимости определить ФП (различного типа) путем решения соответствующей оптимизационной задачи. В работах [5], [6] сделан вывод, что ГМ могут быть определены использованием грубой ФП.

Принцип построения Г требует разъяснений, в частности, *неразличимость* понимается как *неразличимость по типу*, допускающая количественную оценку, например, ФП не различимы по своей природе, но количество ФП известно, в то же время ФП близки и сходны по своей природе. При построении Г необходимо учитывать, что Г – информационно избыточные объекты, уровень грануляции (размер Г) имеет существенное значение для описания проблемы и выбора стратегии ее решения, следовательно, во всех ли случаях НМ с треугольной ФП достаточно для построения сложных Г; насколько целесообразны НМ-гранулы с ФП, отличными от треугольной.

Интерпретации и классификации Г даны в работах [2], [3], Г – часть целого, подзадача (в задаче), кластер, переменное ограничение (в смысле Л. Заде), единица знания (например, персональный компьютер – Г, материнская плата, память – элементы гранулы). Типичные модели Г, которые связаны с рассматриваемой задачей: интервалы, НМ, лингвистические переменные. В работе [4] приводится решение задач, связанных с образами, отличающееся плохой определенностью геометрической *формы объекта* (к ним относятся природные образования типа морей, озер и т.п.) при помощи методов и моделей ГрК. Теоретической основой для развиваемого подхода является *геометрическое* истолкование задач и методов гранулирования, по мнению авторов, наиболее рациональное для исследования многомерной информации.

Понятие гранулярного представления числовых ФП НМ предлагает комплексный и качественный взгляд на НМ и результат их обработки (процессинг). Отметим,

что интервал, М (четкое или нечеткое, в т.ч. М значений и М соответствующих ФП) рассматриваются как атомарные гранулы. Например, НМ – подмножество упорядоченных пар $\{x/\mu^{(x)}, \mu^{(x)} \to [0,1]\}$ может рассматриваться как объединение атомарных Г – $(x \bigcup \mu^{(x)})$.

Одной из проблем, решение которой имеет принципиальное значение для ГрК, является нечеткая математика с на уровне НМ-Г. В работах [7], [8] показано, что не существует инверсий для НП (или НЧ) в операциях арифметического сложения и умножения соответственно. Хотя в простых прикладных задачах это удается игнорировать [9], недостаток инверсии становится значимым, когда пытаются использовать НП (или НЧ) в сложных приложениях, например, анализируя нечеткие системы, анализ допусков в сложной системе, медицинская диагностика и т.д. В общем случае алгебраическое уравнение, включающее НП (или НЧ), не может быть решено. Например, если $\widetilde{A}$ – НП или НЧ и В – нечеткая или четкая переменная, то в общем случае $\widetilde{X} + \widetilde{A} = \widetilde{B}$ не может решаться для X и аналогично невозможно решить $\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{B}$, т.е. если F – математическая функция, включающая нечеткие параметры, то невозможно найти число X, в общем случае такое, что F(X) = B, даже если решение существует, его трудно найти. Известны процедуры, которые позволяют определять степень, с которой предлагаемое решение *удовлетворит* данное уравнение, причем степень удовлетворения не всегда может быть приемлемой. Этот тезис в значительной степени определил **цель работы** – разработку Г и методов обработки гранулированной информации, способных хотя бы частично устранить указанный недостаток НМ.

Постановка задачи

ГрК имеет достаточно много определений, одно из них приведено ранее. Гранулярные вычисления включают в себя *«мягкие вычисления»* (МВ) и собственно методологию и методику гранулярных вычислений. Отметим, что МВ – обобщенный термин, включающий в себя математические теории общей топологии, теорию НМ, нейросетевые вычисления и др.

Формально объединение элементов в Г, как это отмечалось выше, определяется исходя из сходства элементов, «близости» и т.д., на практике нередко ограничивается т.н. *визуальным сходством*. Каждая Г обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами. Процесс грануляции – итеративная алгоритмическая процедура последовательного выделения частей различного уровня общности и согласования уровней абстракции и редукции при анализе неочевидно структурированных систем.

Хотя понятие «атомарной» Г, из которых следует «собирать» крупные Г, не определено и зависит от контекста рассматриваемой проблемы, ниже понятия *множества элементов* (в общем случае нечеткого) не опускаются. Это обстоятельство отображается, в частности, в том, что отношения между Г описываются с помощью нечетких графов и систем нечетких логических правил типа «если …, то …». Принципы гранулирования, реализуемые на основе гранулярной логики и гранулярной математики, основаны на топологии, степенных операторных алгебрах, интервальных алгебрах, алгебрах нечетких, мягких и грубых множеств и т.д. При грануляции используются методы многокритериальной оптимизации.

В работе [10] рассмотрен метод представления информационных Г, индуцированный нечеткостью, который является наиболее часто применяемым, показано, что нечеткая Г (в общем случае НМ) может быть представлена как произведение независимых скалярных экспоненциальных функций, отметим, что в данной работе Г рассматривается как тензорное произведение векторов, представляющих собой

элементы НМ, т.е. $\tilde{x}=\{x/\mu^{(x)}\}\rightarrow\left(x\otimes\mu^{(x)}\right)$. НМ выступают как гранулированные представители числовых данных, компонуемых в некоторый контекст. Тот факт, что каждая Г обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами, свидетельствует о ее автономности и самодостаточности. Поэтому одной из задач является исследование внутренних свойств НМ-гранулы (или f-гранулы), представленной в виде тензора.

Рассматривается комплекс подзадач: а) представление НМ-гранулы как ИГ в форме тензора с матрицами m × m, где m – количество различимых элементов, в случае НМ – число упорядоченных пар $\{x/\mu^{(x)}\}_1^m$; b) математические операции с полученными ИГ; c) получение новой (скрытой) информации относительно свойств объектов, представленных в виде НМ-Г; d) прикладные задачи, связанные с оценкой влияния ФП на результат арифметической операции с ИГ.

НМ-Г $\tilde{A}=\{U,\mu\}$, где U – универсум, μ - ФП, т.е. $\tilde{A}=\{u_i/\mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)}\rightarrow[0, 1]$, $\tilde{A}\subset U\times[0,1]$, в работе рассматривается в виде тензор-гранулы (ТГ):

$$\tilde{A}=\{u_i/\mu_i^{(u)}\}\rightarrow\left([u]\otimes[\mu^{(u)}]^T\right)_{i=1}^n=[u_1\mu_1^{(u)}\cdots u_1\mu_n^{(u)};\ldots;\ u_n\mu_1^{(u)}\cdots u_n\mu_n^{(u)}],$$

где ⊗ – символ тензорного (Кронекерова) произведения, ^{T} (или ') – символ транспонирования, $u=[u_1\ u_2\ \ldots\ u_n]$, $\mu=[\mu_1\ \mu_2\ \ldots\ \mu_n]$.

Способ решения основных задач

В данной работе тензор рассматривается как многомерный массив [11]. Гранулярные вычисления реализованы на основе моделей Кронекеровой алгебры [12]. Если матрица $P = [p_{ij}]$ имеет размер $m_p \times n_p$ и $Q = [q_{ij}]$ имеет размер $m_Q \times n_Q$, то *Кронекерово произведение* $P\otimes Q = [p_{ij}Q]$ – матрица размером $(m_P\ m_Q)\times(n_P\ n_Q)$.

Тензорная сумма (ТС): даны матрицы A(n ×n), B (m×m), тензорная (Кронекерова) сумма $A \oplus B=A\otimes I_m+I_n\otimes B$, где I_m, I_n – единичные матрицы.

Расстояние между матрицами A, B (Фробениусовская норма):

$$d(A,B)_F = (tr((A\otimes I_m - I_n\otimes B)*(A\otimes I_m - I_{n\otimes}B)^T))^{1/2}, \text{ где tr – след.}$$

След: $tr(A\otimes B)=tr\,A\cdot tr\,B$, $tr(A)=\sum_{i=1,n} a_{ii}$ (или $\sum_{i=1,n}a_{ii}/n$).

Расширенные операции Кронекеровой алгебры – $\odot_{min}$ и $\otimes_g$: оператор $\odot_{min,}$ определен в виде: $\odot_{min}:R\times R^n\rightarrow R^n$, $(\alpha,X)\mapsto\alpha\odot_{min}X$, где если $X=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$, то $\alpha\odot_{min}X=[\min(\alpha,x_1)\ \min(\alpha,x_2)\ \ldots\ \min(\alpha,x_n)]$. Оператор $\otimes_g$ определен в виде: $\otimes_g$: $R^m\times R^n\rightarrow R^{m\times n}$, $(X, Y)\mapsto X\otimes_g Y$, где если $X=[x_1\ x_2\ldots\ x_m]^T$, то $X\otimes_g Y=[x_1\odot_{min}Y\ x_2\odot_{min}Y\ \ldots\ x_m\odot_{min}Y]$. *Тензорные гранулы НМ-Г.* Пусть исходные НП имеют вид, показанный на рис. 1. НМ $\tilde{a}=\tilde{5}\overset{def}{=}\{3/0\ 5/1\ 7/0\}$, $\tilde{b}=1\tilde{0}\overset{def}{=}\{7/0\ 10/1\ 14/0\}$ будем рассматривать как тестовые ТГ, полученные как результат $x\otimes\mu^T$, имеют вид: $\tilde{5}\rightarrow ta=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&5&0\\0&7&0\end{pmatrix}$, $1\tilde{0}\rightarrow tb=$

$$=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 14 & 0\end{pmatrix}, \tilde{5}+1\tilde{0} \rightarrow \text{tc} = \text{ta}+\text{tb}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 7 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 14 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 21 & 0\end{pmatrix}$$ и показаны на рис. 1.

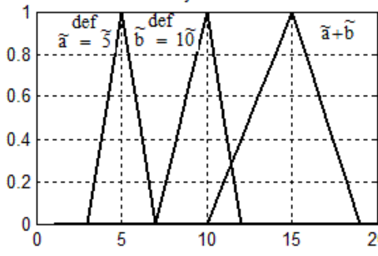
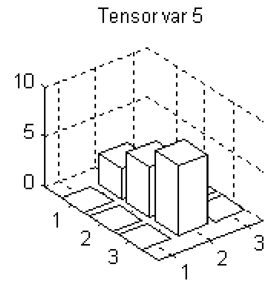


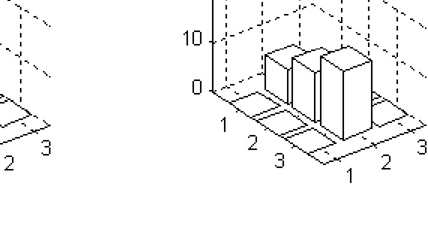
Рисунок 1 – Исходные НП: $\tilde{5} \overset{def}{=} \{3/0\ 5/1\ 7/0\}, 1\tilde{0} \overset{def}{=} \{7/0\ 10/1\ 14/0\}, \tilde{5}+1\tilde{0}$

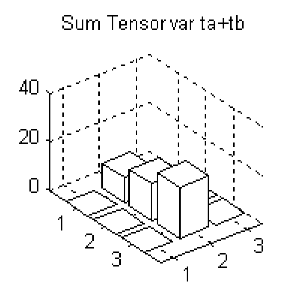
Отметим, что следы и нормы матриц этих ТГ обладают свойствами: trace(tc) = trace(ta) + trace(tb)$\rightarrow$ 15 = 5 + 10: след ТГ-суммы равен сумме следов ТГ, моделирующих НП; след ТГ-суммы совпадает с дефадзифицированным значением суммы НП. Нормы: $\|ta\|_F^2$ = 9.11, $\|tb\|_F^2$ = 18.57, $\|tc\|_F^2$ = 27,67, сумма норм матриц ТГ (моделирующих НП) практически равна норме матрицы ТГ, моделирующей сумму НП, т.е. сумму матриц. Для tc, ta, tb существуют псевдообратные матрицы.

Представление НП с трапециевидной ФП. Формирование ТГ для НП с трапециевидной ФП, заданной на УМ x = [2 :2: 8], реализовано для μ_x = trapmf(x,[x]);

$$t_{trapmf} = \text{kron}([2\ [4\ 6]\ 8],[0\ 1\ 0]') = \left(2\ \underbrace{[4\ \ 6]}\ 8\right) \otimes (0\,1\,0)^T = \begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix} & 0\\ 2 & & 8\\ 0 & & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0\\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{6} & 8\\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0\end{pmatrix}.$$







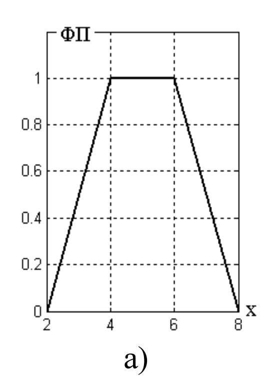
а) б) в)

Рисунок 2 – Гранулы – тензорные аналоги НП и их F-нормы: а) $\tilde{5} \overset{def}{=} \{3/0\ 5/1\ 7/0\}$, б) $1\tilde{0} \overset{def}{=} \{7/0\ 10/1\ 14/0\}$, в) матричная сумма ТГ

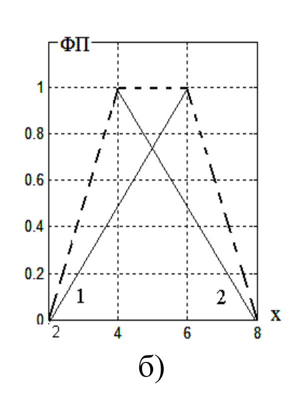
Представление НП с трапециевидной ФП. Формирование ТГ для НП с трапециевидной ФП, заданной на УМ x = [2 :2: 8], реализовано для μ_x = trapmf(x,[x]);

$$t_{trapmf} = \text{kron}([2\ [4\ 6]\ 8],[0\ 1\ 0]') = \left(2\ \underbrace{[4\ \ 6]}\ 8\right) \otimes (0\,1\,0)^T = \begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix} & 0\\ 2 & & 8\\ 0 & & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0\\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{6} & 8\\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0\end{pmatrix}.$$

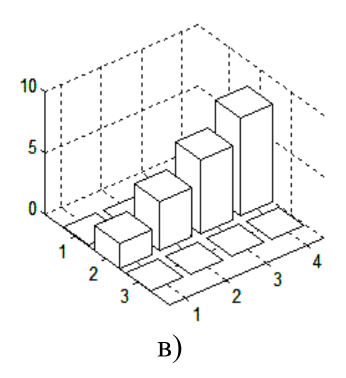
Верхняя и нижняя аппроксимации НП показаны на рис. 3.1 – верхняя аппроксимация НП; 2 – нижняя аппроксимация НП; НП с *грубой* ФП – {2/0, $\underbrace{[4\ 6]}_{5}/1$, 8/0}.ТГ для НП – рис. 3в.



а)



б)



в)

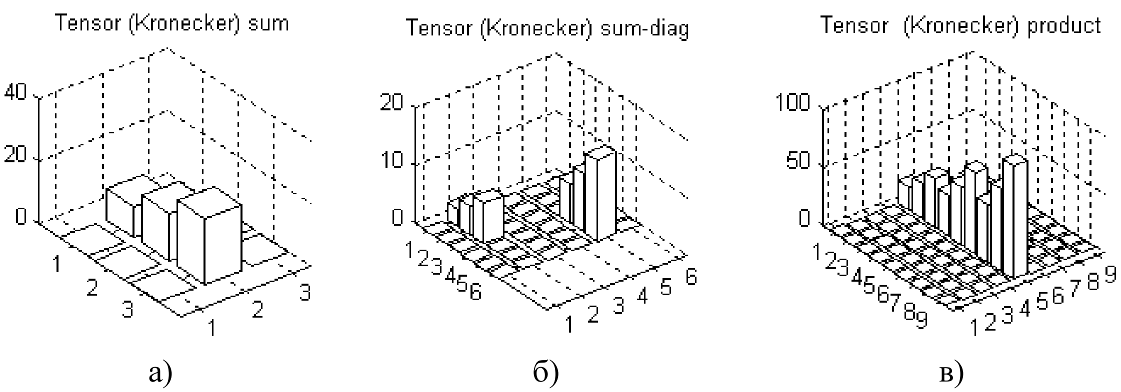
Рисунок 3 – Формирование ТГ для НП с трапециевидной ФП: а) НП с трапециевидной ФП, x = [2 :2: 8], μ_x = trapmf(x,[x]); б) верхняя и инжняя аппроксимации НП: 1 – верхняя аппроксимация НП; 2 – нижняя аппроксимация НП; НП с *грубой* ФП – {2/0, 5/1, 7/0}: в) ТГ для НП: x = [2 :2: 8], μ_x = trapmf(x,[x])

Отметим важное свойство ТГ, сформированных на базе НП с треугольной ФП: след ТГ гранулы совпадает с дефадзифицированным значеним НП, которая представлена ТГ. ГрК – вычислительная парадигма обработки информации, использующая *доступные* знания в данных на различных уровнях детализации. Выбор соответствующего уровня степени детализации – критично в приложениях ГрК. Например, выбор достаточно большого универсума может привести к существенному огрублению результатов и невозможности принятия решения. Необходим эффективный метод для выбора уровня степени детализации в ГрК.

В работе принята следующая парадигма детализации НМ для представления его в форме ТГ. Пусть УМ X, НП $\tilde{a} \overset{def}{=}$ примерно a и $\tilde{b} \overset{def}{=}$ примерно b определены на X в виде НП с треугольной ФП: μa(x) $\overset{def}{=}$ trimf(X, [a b d]) и μb(x) $\overset{def}{=}$ trimf(X, [a1 b1 d1]), задана операция $\tilde{c} = \tilde{a} + \tilde{b}$, то ТГ ta, tb, tc, соответствующие $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ ($\tilde{a} \to$ta, $\tilde{b} \to$tb и $\tilde{c} \to$ tc), должны быть определены соответственно: ta = kron([a b c], [μa(a) μa(b) μa(d)]T), tb = kron([a1 b1 d1],[μb(a1) μb(b1) μb(d1)]T), tc = ta*Kr tb, где *Kr ∈{+, -,/,*}. Отметим, что теоретико-множественная интерпретация грануляции употребляется наиболее часто, однако одно из определений [10] рассматривает грануляцию информации – как семантически значимое группирование элементов, именно оно использовано авторами в работе.

Тензорная алгебра с ТГ рассмотрена на примере реализации операций $\tilde{a} + \tilde{b}$ и $\tilde{a} * \tilde{b}$,$\tilde{a} + \tilde{b} \to ta \otimes I_1 \oplus I_1 \otimes tb$, $\tilde{a} + \tilde{b} \to \begin{pmatrix} ta & [\mathbf{0}]_3^3 \\ [\mathbf{0}]_3^3 & tb \end{pmatrix}$; $\tilde{a} * \tilde{b} \to ta \otimes tb$, здесь ta,tb – ТГ для НП $\tilde{a}, \tilde{b}$.

Рис. 4. иллюстрирует смысл и содержание операций.



а) б) в)

Рисунок 4 – Тензорная алгебра над ТГ (аналогами НП): а) $tab_{sum} = ta \otimes I_1 \oplus I_l \otimes tb$;

б) $tab_{sum1} = \begin{pmatrix} ta & [\mathbf{0}]_3^3 \\ [\mathbf{0}]_3^3 & tb \end{pmatrix}$; в) $tab_{prod} = ta \otimes tb$

Результаты моделирования приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Следы матриц тензоров

trace(ta)	trace(tb)	trace(tab_{sum})	trace(tab_{sum1})	trace(tab_{prod})
5.00	10.00	15.00	15.00	50.00

Вывод: следы матриц тензор-Г – аналогов НП и результатов операций алгебраических операций над ними совпадают во всех случаях с дефадзифицированными значениями НП и результатами арифметических операций с НП.

Тензорная алгебра с ТГ для НП с треугольной и трапециевидной ФП рассмотрена на примере операции тензорной суммы ТП $[\tilde{5}_{trimf}] \oplus [\tilde{5}_{trapmf}]$ и приведена на рис. 5.

taxg=[[x zeros(3,4)]' [zeros(3) kron(a,ma)]']

$$\begin{pmatrix} (\tilde{5}_{trimf}) & (0) \\ (0) & (\tilde{5}_{trapmf}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

taxg=[[x' zeros(3,4)]; [zeros(3) kron(a,ma)]]

$$\begin{pmatrix} (\tilde{5}_{trimf}) & (0) \\ (0) & (\tilde{5}_{trapmf}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trace(taxg)=9

trace(taxg)=9

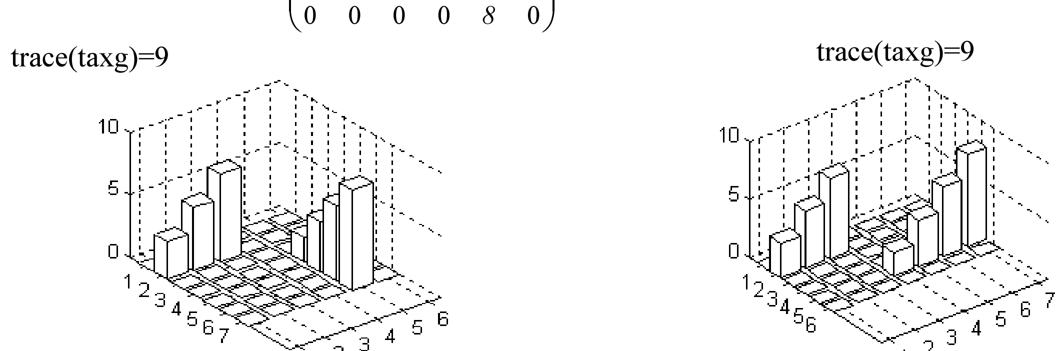


Рисунок 5 – Тензорная сумма ТГ $[\tilde{5}_{trimf}] \oplus [\tilde{5}_{trapmf}]$, моделируются НП с треугольной и трапециевидной ФП: $\tilde{5}_{trimf} + \tilde{5}_{trapmf}$

Отметим, что и в этом случае

$$\mathrm{trace}\left(\left[\tilde{\mathfrak{F}}_{trimf}\right] \oplus \left[\tilde{\mathfrak{F}}_{trapmf}\right]\right) \cong \mathrm{trace}\left(\left[\tilde{\mathfrak{F}}_{trimf}\right]\right) + \mathrm{trace}\left(\left[\tilde{\mathfrak{F}}_{trapmf}\right]\right).$$

Применение ТГ связано с реализацией внешних, внутренних и многомерных произведений тензоров, а также анализом их норм. В частности, анализ норм ТГ для условий принадлежности, непринадлежности, частичной принадлежности может играть важную роль в принятии решений.

Гранулярный компьютинг с ТГ

Фадзификация входного МД. При управлении в условиях неопределенности возникает проблема представления исходного МД в виде НМ, т.е. совокупности упорядоченных пар {значение/ФП}. В этой связи ИМД рассматривается как многомерный массив данных, т.е. тензор, с последующей тензорной аппроксимацией – определением матрицы, компоненты которой получены как тензорное произведение значения на ФП. Таким образом, ИМД представляется в виде НМ.

Аппроксимации матриц глобального характера [13] – тензорные аппроксимации вида

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_r = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{V}_k^1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{V}_k^m = \sum_{k=1}^{r} [v_j^{(k} \otimes \{\mu_j^{(v^{(k)})}\}^T]^1 \otimes \cdots \otimes [v_j^{(k)} \otimes \{\mu_j^{(v^{(k)})}\}^T]^m,$$

где $\mathbf{V}_k^i = \left(v_j^{(k)} \otimes (\mu_j^{(v^{(k)})})^T \right)$, $i = 1,m$; $j = 1,J$; $\otimes$ – прямое (тензорное, Кронекерово) произведение матриц, $\{v_j^{(k)} / \mu_j^{(v^{(k)})}\}$ – НП, $\mu_j^{(v^{(k)})} \to [0,\ 1]$ – ФП, ^{T} – символ транспонирования. Исследования показали, что в случае ГрК при использовании НП со стандартной ФП можно ограничиться более простым соотношением, т.е. одной компонентой из суммы

$$\mathrm{A} \approx \mathrm{A}_r = [v_j \otimes \{\mu_j^{(v)}\}^T],\ j=1,J. \tag{1}$$

В общем случае при фадзификации большого потока данных наиболее применим путь аппроксимации матрицы данных А (1) «хорошей» матрицей специального вида A_r и построения эффективных алгоритмов для работы с нею, т.е. $\left\| A - A_r \right\|_F^2 \to \min$, что позволяет строить тензорные аппроксимации минимального ранга с гарантированной точностью по норме Фробениуса на основе скелетонного приближения [13], которое можно вычислить с помощью стандартного алгоритма сингулярного разложения. Отметим, что элементы матрицы А представляют собой значения некоторой асимптотически гладкой функции на прямоугольной сетке в квадрате на плоскости, что в общем случае справедливо для ФП.

Решение нечетких уравнений (НУ). Пусть НУ имеет вид: $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{c}$, где $\tilde{a}, \tilde{x}, \tilde{c}$ – НП, $\tilde{a} = \{a/\mu^{(a)}\}$, $\tilde{x} = \{x/\mu^{(x)}\}$, $\tilde{c} = \{c/\mu^{(c)}\}$. Гранулирование НП позволяет представить исходное НУ в виде матричного уравнения АХ = С, где $\mathbf{A} = [a \otimes \mu^{(a)}]$, $\mathbf{X} = [x \otimes \mu^{(x)}]$, $C = [c \otimes \mu^{(c)}]$. Известно [12], что соотношение АХ = С может быть записано в виде $(I \otimes A)\ x = c$, где вектор x – это векторизованная матрица X, $\mathbf{x} = (x_{11}, \cdots x_{n1}, \cdots, x_{1n}, \ \cdots,\ x_{nn})^T$, вектор c из С получен аналогично. Векторизация матриц имеет важное значение для решения матричных уравнений и систем матричных уравнений в векторно-матричной форме. Например, для исходного уравнения решение может быть получено из условия AXI = C, т.к. используя векторизацию можем записать vec(AXI) = (I ⊗A) vec X = vec C.

Выводы

1. Показано, что трудности определения инверсий для НП (или НЧ) в операциях арифметического сложения и умножения соответственно, игнорируемые в простых прикладных задачах, превращаются в недостаток, который становится значимым, когда пытаются использовать НП (или НЧ) в сложных приложениях. Предложено представление НМ-Г в виде тензор-гранул с матрицами $m \times m$, где m – число различимых элементов (ФП).

2. В работе ИГ рассматривается как тензорное произведение векторов, представляющих собой элементы НМ – $\{x/\mu^{(x)}\} \rightarrow [x \otimes \mu^{(x)}]$. Показана целесообразность реализации *гранулярных вычислений на основе моделей Кронекеровой алгебры,* позволяющих существенно расширить возможности гранулярного компьютинга при решении задачи управления в условиях неопределенности.

3. Проблема представления исходного МД в виде НМ, т.е. совокупности упорядоченных пар {значение/ФП}может быть эффективно решена при помощи методов тензорной аппроксимации: ИМД рассматривается как многомерный массив данных, т.е. тензор, с последующей тензорной аппроксимацией – определением матрицы, компоненты которой получены как тензорное произведение значения на ФП, наименее уклоняющееся от ИМД (в смысле Фробениусовской нормы), таким образом ИМД представляется в виде НМ.

Литература

1. Минаев Ю.Н. Иерархическая кластеризация нечетких данных / Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева // Электрон. моделир. – 2012. – Т. 34, № 4. – С. 3-22.
2. Zadeh L.A. Toward a Generalized Theory of Uncertainty / L.A. Zadeh // Information Sciences – Informatics and Computer Science. – 2005. – Vol. 172. – P. 1-40.
3. Aja-Fern´andez S. Fuzzy Granules as a BasicWord Repre-sentation for Computing with Words / S. Aja-Fern´andez, C. Alberola-L´opez // SPECOM' 2004 : 9th Conference Speech and Computer. – St. Petersburg, Russia, September 20 – 22, 2004) – 2004. – ISCA Archive[Электронный ресурс]. – Режим доступа к материалам конф. : http://www. isca-speech.org/archive.
4. Бутенков С.А. Математические модели анализа многомерных данных экологического мониторинга на основе теории информационной грануляции / С.А. Бутенков // Искусственный интеллект . – 2009. – № 3. – С. 24-32.
5. Sankar K.Pal. F-granulation, Generalized Rough Sets and Entropy Uncertainty Analysis in Pattern Recognition with Applications /K.Pal. Sankar// 7-th Int. Workshop of the Data Analysis in Astronomy – Science: Image in Action (Erice, Sicily, April 16 – 20, 2011), 2011 [Электронный ресурс]. – Режим доступа к материалам конф. : http://www.isical.ac.in/ ~sankar .
6. Pawlak Z.A. Rough membership functions : Advances in the Dempster Shafer Theory of Evidence / Z.A. Pawlak, A. Skowron ; [R.R. Yaeger, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk eds.]. – John Wiley & Sons, Inc., NY, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
7. Hong D.H. On solving fuzzy equation / D.H. Hong // Korean J. Comput. & Appl. – 2001, Math. – Vol. 8, № 1. – P. 213-223.
8. Yager R.R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic / R.R. Yager // Fuzzy Sets and Systems. – 1980. – № 4. – P. 73-82.
9. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An Introduction with Engineering Applica-ions / Hanss M. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 260 pp.
10. Bargiela A. Granular Computing: An Introduction / A. Bargiela, W. Pedrycz. - N.Y. : Springer, 2002.
11. Kolda T.G. Tensor Decompositions and Applications / T.G. Kolda, B.W. Bader // SIAM REVI-EW. – 2009. – Vol. 51, № 3. – P. 455-500.
12. Босс В. Лекции по математике: линейная алгебра / Босс В. – М. : КомКнига. – 2005. – Т. 3. – 224 с.
13. Тыртышников Е.Е. Тензорные аппроксимации матриц, порожденных аси-мптотически гладкими функциями / Е.Е. Тыртышников // Мат. сборник. – Т. 194, № 6. – 2003. – С. 147-162.

Literatura

1. Minaev Yu.N. Electronnoe modelirovanie / Yu.N. Minaev. – 2012. – T. 34, № 4. – S. 3-22
2. Butenkov S.A. Iskusstvennyj intellect / S.A. Butenkov. – 2009. – № 3. – S. 24-32.
3. Boss B. Leksii po matematike / Boss B. – M. : KomKniga. – 2005. – 224 c.
4. Tirtishnikov Eu.Eu. Matematicheskiy sbornik / Eu.Eu. Tirtishnikov. – T. 194, № 6. – 2003. – P. 147-162.

RESUME

Yu.N. Minaev, O.Yu. Filimonova, Ju.I. Minaeva

Tensor Model FS-Granules and their use for Solving Fuzzy Arithmetic

Information granulation and granular computing (GrC) has played a leading role in the representation and processing of knowledge: knowledge of hidden, definition of new properties of information objects. First fuzzy granulation of information and how it is delivered to the treatment works Zadeh in which granules (Gr) is defined as a group of objects (or points), which are presented (shown) together on the basis of indistinguishability, similarity, proximity. Issues of formation Gr closely related to the theory of rough sets (RS). RS can be seen as a clear S with rough description, RS can be determined using rough MF.

Gr-Information excess objects, level of granulation (size Gr) is essential for the description of the problem and the choice of strategies for response

In paper Gr is considered as the tensor product of vectors representing the elements of FS $\tilde{x} = \{x/\mu^{(x)}\} \rightarrow \left(x \otimes \mu^{(x)}\right)$. Examines the complex tasks: a) presentation FS-granules in the form of the tensor (tensor-granule-TG) with matrices m × m, where m – the number of dis-tinct elements, in the case of FS-number of ordered pairs $\{x/\mu^{(x)}\}_1^m$; b) mathematical operations with those obtained Gr; c) to obtain a new one (the latent) information about the properties of the objects in the form of FS-Gr; d) applied problems.

Property TG, formed on the basis of fuzzy variables (FV) with a triangular MF: TG trace coincides with defuzzification value FV, traces of matrices TG-FV counterparts and the results of operations on them are the same in all cases, with values defuzzification FV and the results of arithmetic operations with FV.

Granular computing with TG for applications considered by the example fuzzification set of data (SD) in managing under uncertainty and the decision fuzzy-equations (FE). When fuzzification of large amounts of data is now efficiently approximated set of data matrix A «good» special type Ar matrix and build effective algorithm. to work with it, that is, $\left\| A - A_r \right\|_F^2 \rightarrow \min$, which allows you to build minimum rank approximation with guaranteed accuracy for the Frobenius norm.

Solution FE $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{c}$ can be obtained from the condition of AXI = C, as using vectorized TG can write vec (AXI) = (I⊗A)vec(X) = vec(C). The feasibility of rea-lizations of granular computing model based Kronecker algebra to significantly expand the capabilities of granular computing to solve the control problem under uncertainty is Shows.

The problem of representation original set of data (SD) in the form set of ordered pairs {value / MF} can be effectively solved by the methods of tensor approximation: original SD is considered as a multi-dimensional array of data that is tensor, followed by a tensor approximation – the definition of the matrix, which least deviates least from original SD, the components of which are obtained as the tensor product of the values of the OP, so original SD represented as FS.

Статья поступила в редакцию 26.02.2013.